Hartshorne-Griffiths予想について(代数幾何学の最近の発展)

AUTHOR(S):

隅広, 秀康

CITATION:

隅広, 秀康. Hartshorne-Griffiths予想について (代数幾何学の最近の発展). 数理解析研究所講究録 1972, 144: 60-74

ISSUE DATE:

1972-05

URL:

http://hdl.handle.net/2433/106716

数理解析研究所講究録
144巻 1972年 60-74

Hartshorne - Griffiths 予想について

甲南大 応数 隅広秀康

§0 序

Xを代数的閉体k上で定義されたn次元non-singular projective variety, EをX上の階数rのベクトルバンドルとする. $r=1$のときには良く知られている様に$c_1=c_1(E)$をEの一次のChern classとすれば, c_1^k $(1\leq k\leq n)$ がnumerically positiveであることがEのamplenessを特性付けています. 一般のrのときもEがampleならばこの種の性質が成立するか? 又逆にこの種の性質がamplenessを特性付けるか? この問題は単にample vector bundlesについての興味だけでなく, 高次元代数的多様体を研究して行く上に, 例えば, Riemann-Rochの定理を使う時, 閉部分多様体の入り方等, 大切な問題となって来ます. しかしながら現在あまり多くの事柄は解っていないと思われます. 今後良く使われる記号を先ず列記しておきます.

<u>記号</u> $c_i=c_i(E)$: Eのi次のChern class.

$I=(i_1,i_2,\ldots,i_r)$: 負でない整数の組.

$|I|$: $|I| = i_1 + 2i_2 + \cdots + ri_r$ （I の weight）

$c^I(E)$: $c^I(E) = c_1^{i_1} c_2^{i_2} \cdots c_r^{i_r}$

p : $p = k$ の標数.

$\mathrm{Grass}_n(\Omega^{\oplus r})$: r 次元 vector space $\Omega^{\oplus r}$ （Ω : k の一つの万有体）の n 次元 quotient vector spaces （又は，$(r-n)$ 次元の $\Omega^{\oplus r}$ の subvector spaces）全体のなす Grassmann variety.

σ_a : Schubert condition $a = (a_1, a_2, \ldots a_{r-n})$ の Schubert cycle

$\sigma_p(A)$: A を $\Omega^{\oplus r}$ の a 次元 vector subspace とし，A と p 次元以上で交わる $(r-n)$ 次元の vector subspaces のなす p 次の special Schubert cycle.

即ち Schubert condition $a = (a_1, a_2 \ldots, a_{r-n})$ において，

$a_1 = a-p+1,\ a_2 = a-p+2, \ldots, a_{p-1} = a-1,\ a_p = a,$

$a_{p+1} = n+p+1, \cdots, a_{r-n} = r$ としたものである.

Q : $\mathrm{Grass}_n(\Omega^{\oplus r})$ の universal quotient vector bundle.

今迄に解っている主な事柄は，

(1) $p = 0$ のとき（Gieseker-Bloch [3]）: E を X 上の ample vector bundle とすると，各 $c_i = c_i(E)$ は numerically positive である.

(2) p が任意のとき（Gieseker [4]）: E を X 上の strongly ample vector bundle とすると，$|I| \leq \min(r, n)$ をみたす任意の

I に対して，$c^I(E)$ は numerically positive である．

我々は，ここでは，(2) の結果を Grassmannian geometry を利用して拡張出来ることを示しましょう．

<u>定理</u>　E を X 上の global sections で生成された ample vector bundle，I を $|I| \leq \min(n, r)$ をみたす I，このとき，$c^I(E)$ は numerically positive である．（p は任意．）

§1　Grassmannian geometry.

Grassmann variety (scheme), Schubert cycles, special Schubert cycles 等については，Hodge-Pedoe [6] 又は S. Kleiman [5] をみていただく事にします．

<u>命題</u>　X：k 上定義された $\mathrm{Grass}_n(\Omega^{\oplus r})$ の d 次元 closed subvariety で，$Q|X$ が ample．

a：　$0 < a < r$ である任意の整数．

→ 一般の a 次元 vector subspace A ($\subset \Omega^{\oplus r}$) に対して，

$X \cap \sigma_a(A)$ は pure dimension $d-na$ である closed subset である．

(証明)　A を $\Omega^{\oplus r}$ の一般の a 次元 vector subspace とし，$\{e_1, \ldots, e_r\}$ を $\Omega^{\oplus r}$ の canonical base とする．$\{s_{ij}\}$ ($1 \leq i \leq a$, $1 \leq j \leq r$) を k

上 independent variables とし, $f_i=\sum_{j=1}^{r} s_{ij}e_j$ $(1\leq i\leq a)$ を A の一つの base とする. y を $X\cap\sigma_a(A)$ の任意の point とする. $\{e_1,\dots e_r\}$ の順序を適当に取り変えて, $y\in U=U_{12\cdots n}$ として良い. 但し,

$U_{12\cdots n}=\{x\in \mathrm{Grasson}(\Omega^{\oplus r})\mid x$ は $[e_{n+1}-\sum_{i=1}^{n}t_{i1}e_i,\dots,e_r-\sum_{i=1}^{n}t_{i\,r-n}e_i]$ で生成される $\Omega^{\oplus r}$ の $(r-n)$ 次元 vector subspaces$\}\cong\Omega^{\oplus n(r-n)}$. このとき, $\sigma_a(A)\cap U\ni t=(t_{ij})$ は

$$s_{\ell i}+\sum_{j=1}^{r-n}s_{\ell j+n}t_{ij}=0\qquad(\ell=1,2\ldots a\,;\ i=1,2\ldots n)$$

で定義される. (cf. S. Kleiman [5]) $M=\{(\alpha,\beta)\mid 1\leq\alpha\leq n,\ 1\leq\beta\leq a\}\cup\{(0,a)\}$ に, 次の様に辞書式順序を入れる.

$(n,a)>(n,a-1)>\cdots>(\alpha,\beta)>(\alpha,\beta-1)>\cdots>(\alpha,1)>(\alpha-1,a)>\cdots>(0,a)$. $(X\cap U)$ の closed subset $X_{(\alpha,\beta)}$ を次の様に定義する.

$$X_{(\alpha,\beta)}=\left\{(t_{ij})\in X\cap U\ \middle|\ \begin{array}{l}s_{\ell i}+\sum_{j=1}^{r-n}s_{\ell j+n}t_{ij}=0\\ (1,1)\leq{}^\forall(i,\ell)\leq(\alpha,\beta)\end{array}\right\}$$

即ち,

$$(\alpha,\beta)-1=\begin{cases}(\alpha-1,\beta) & \text{if } \beta=1\\ (\alpha,\beta-1) & \text{if } \beta\neq 1\end{cases}$$

と定義するとき,

$$X_{(\alpha,\beta)}=X_{(\alpha,\beta)-1}\cap\{(t_{ij})\in X\cap U\mid s_{\beta\alpha}+\sum_{j=1}^{r-n}s_{\beta j+n}t_{\alpha j}=0\}$$

$$X_{(n,a)}=X\cap\sigma_a(A)\cap U,\qquad X_{(0,a)}=X\cap U$$

である. $X_{(0,a)}\supset X_{(1,1)}\supset X_{(1,2)}\supset\cdots\supset X_{(\alpha,\beta)-1}\supset X_{(\alpha,\beta)}\supset\cdots\supset\cdots$

$\cdots \supset X_{(n,\alpha)} = X \cap \sigma_a(\beta) \cap U$．$k_{(\alpha,\beta)} = k_{(\alpha,\beta)-1}(s_{\beta j} \mid j = \alpha, n+1, \cdots, r)$ とすると各 $X_{(\alpha,\beta)}$ は $k_{(\alpha,\beta)}$ 上定義されている．各 $X_{(\alpha,\beta)}$ が pure dimension $= \dim(X_{(\alpha,\beta)-1}) - 1$ であることが示せれば良い．その為に次の事が基本的である．$1 \leq {}^\forall\alpha \leq n$ に対して，

$$\pi_\alpha : U \ni (t_{ij}) \longmapsto (t_{\alpha j}) \in \Omega^{\oplus(r-n)} \quad (1 \leq j \leq r-n)$$

とすると π_α は $X \cap U$ 上の quasi-finite morphism である．なぜならば，$\{e_1, \ldots, e_r\}$ を $\mathbb{P}(\mathrm{Grass}_n(\Omega^{\oplus r}), Q)$ の元とみるとき，$\{e_1, \ldots, e_n\}$ は $Q|U \simeq \mathcal{O}_U^{\oplus n}$ なる同型を与えているから，特に $(X \cap U)$ 上で $(e_1, \ldots, e_n)$ は，$Q|X \cap U \simeq \mathcal{O}_{X \cap U}^{\oplus n}$ なる同型を与えている．仮定より，$Q|X$ が ample であることより，$Q|X$ の tautological line bundle は ample．故に，$L_{Q|X}$ ($Q|X$ の tautological line bundle) の global sections を利用しての $\mathbb{P}(Q|X)$ から $\mathbb{P}^{r-1}(\Omega)$ への morphism φ は finite morphism である．

$$\begin{array}{ccccc} (X \cap U) \times \mathbb{P}^{n-1} & \underset{\text{open immers.}}{\hookrightarrow} & \mathbb{P}(Q|X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}^{r-1}(\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ (X \cap U) & \underset{\text{open immer.}}{\hookrightarrow} & X & & \end{array}$$

よって，$\varphi / (X \cap U) \times \mathbb{P}^{n-1}$ は quasi-finite．${}^\forall((t_{ij}) \times \xi) \in (X \cap U) \times \mathbb{P}^{n-1}$ に対して，

$$\varphi((t_{ij}) \times \xi) = (\xi_1 : \cdots : \xi_n : \sum_{i=1}^n t_{i1}\xi_i : \cdots : \sum_{i=1}^n t_{i\,r-n}\xi_i)$$

故に，$1 \leq {}^\forall\alpha \leq n$ に対して，$\xi^\alpha = (0, 0 \cdots 0, \underset{\alpha}{1}, 0 \cdots 0)$ とすると，

$\varphi((t_{ij})\times \xi^{\alpha}) = (0:\cdots:0:\overset{\alpha}{1}:0\cdots0:t_{\alpha 1}:\cdots:t_{\alpha\, r-n})$

よって，$\pi_\alpha : X\cap U \ni (t_{ij}) \longmapsto (t_{\alpha j}) \in \Omega^{\oplus(r-n)}$ $(1\leq j\leq r-n)$

は quasi-finite morphism である．

<u>補題</u>　$U = \mathrm{Spec}(k[t_1,\ldots,t_N])$: N次元 affine space．（kは必ずしも代数的閉体であるとは限らない．）

X : Uのキヤクな d次元 subscheme．

$s, s_1,\ldots, s_m$: k上の$(m+1)$個の independent variables．

$f = s_1t_1+\cdots+s_mt_m+f_1(t_{m+1},\ldots,t_N)$: $f_1(t_{m+1},\ldots,t_N)$はk係数の多項式．

$\pi : U = \mathrm{Spec}(k[t_1,\ldots t_m, t_{m+1},\ldots,t_N]) \to U' = \mathrm{Spec}(k[t_1,\ldots t_m])$ なる projection．

このとき，もし $\pi|X \to U'$が quasi-finite morphism ならば，$W = X\cap(f=s)$は pure dimension $(d-1)$のXの closed subscheme である．

（証明）Ω : kの universal domain．$L = k(s_1,\ldots,s_m)$．補題を示すにはkは代数的閉体として良い．$X(\Omega)$（XのΩ-valued points）のL上の generic point を $y = (y_1,\ldots,y_N)$とし，$s' = f(y)$ $(\in L(y_1,\ldots y_N))$とする．$d=0$のときは明らかだから $d\geq 1$とする．s'がL上 algebraic ならば，$L(y_1,\ldots y_N)$はL上 regular であるから，$s'\in L(y_1,\ldots y_N)$．故に $\{s', s_1,\ldots s_m, 1\}$は$k(y_1,\ldots y_N)$上 linearly dependent．$k(y_1,\ldots y_N)$と$L$は，

k と linearly disjoint であるから，$\{s', s_1, \cdots, s_m\}$ は k 上 linearly dependent. 故に，$s' = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots + s_m a_m + a$ $(\exists a, \exists a_i \in k)$
一方，$s' = s_1 y_1 + s_2 y_2 + \cdots + s_m y_m + f_1(y)$. 故に，

$$s_1(y_1 - a_1) + s_2(y_2 - a_2) + \cdots + s_m(y_m - a_m) + (f_1(y) - a) = 0.$$

$\{s_1, \ldots, s_m, 1\}$ は $k(y_1, \ldots y_N)$ 上 linearly independent であることより，$y_i = a_i$ $(1 \le i \le m)$，$f_1(y) = a$. $\pi | X(\Omega)$ が quasi-finite より，$\dim X(\Omega) = d = 0$. $d \ge 1$ なることに反するから，s' は L 上 algebraically independent. 故に適当な $\sigma \in Aut_L(\Omega)$ で $\sigma(s') = s$ をみたすものが存在する. 故に，

$$s = \sigma(s') = s_1\sigma(y_1) + s_2\sigma(y_2) + \cdots + s_m\sigma(y_m) + f_1(\sigma(y))$$

であるから，$\sigma(y) = (\sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_N)) \in W$. よって，$d = tr_L L(y_1, \ldots, y_N) = tr_L L(\sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_N)) = tr_K L(\sigma(y_1) \ldots \sigma(y_N)) + tr_L K = tr_K L(\sigma(y_1), \ldots, \sigma(y_N)) + 1$. (但し $K = L(s)$). 故に，W の各キヤク成分は K 上互いに共役であるから，W は pure dimension $= d-1$ の closed subscheme である.

命題の証明は，上の補題と (α, β) に関する帰納法で証明される.

次に，universal quotient vector bundle の各 Chern classes と Schubert cycles の関係を復習します.

<u>命題</u> Q: $Grass_n(\Omega^{\oplus r})$ の universal quotient vector bundle. $1 \le \nu_i \le n$ に対して，

$c_i(Q) = \sigma_{n-i+1, n+2, \ldots, r} = \sigma_i(A)$

但し, $\dim A = (n-i+1)$.

証明は, S. Kleiman [5] 又は, 隅元 [7] を見て下さい.

§2 定理の証明.

X : k 上定義された n 次元 non-sing. projective variety.

E : X 上の rank $= r$ の global sections で生成された ample vector bundle

N : $N = \dim H^0(X, E)$

とする. このとき, 次の exact sequence が存在する.

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to \mathcal{O}_X^{\oplus N} \xrightarrow{\varphi} E \to 0 \quad (\text{exact})$$

この exact sequence を利用して, 次の canonical morphism $\bar{\varphi}$ を定義出来る.

$$\bar{\varphi} : X \ni x \longmapsto \{E(x) \mid k(x)^{\oplus N} \to E(x) \to 0\} \in \mathrm{Grass}_r(\Omega^{\oplus N})$$

Q を $\mathrm{Grass}_r(\Omega^{\oplus N})$ の universal quotient vector bundle とすれば, $E = \bar{\varphi}^*(Q)$ が成立する. E が ample vector bundle ~~であり~~ であるから, $\bar{\varphi}$ は finite morphism であり, $X' = \mathrm{Im}\,\varphi$ of X とするとき, $Q|X'$ は ample vector bundle である. 又 $r > n$ のときは,

$$0 \to \mathcal{O}_X^{\oplus(r-n)} \to E \to {}^{\exists}E' \to 0 \quad (\text{exact})$$

を考えることにより，定理を証明するには，$r \le n$ として良い．

命題　上述の条件で，$r \le n$ のとき，$c_r(E)$ は numerically positive である．

(証明). $\varphi: X \to Grass_r(\Omega^{\oplus N})$ を canonical morphism とする．
Y を X の任意の次元 r の closed subscheme (irreducible) とする．

$$\varphi_*(c_r(E)\cdot Y) = \varphi_*(\varphi^*(c_r(Q))\cdot Y) = c_r(Q)\cdot \varphi_*(Y).$$

Y' を Y の φ による像とし，$l = \deg(\varphi|Y)$ とすると，$\varphi_*(Y) = lY'$. 故に，$c_r(E)\cdot Y > 0$ であることと，$c_r(Q)\cdot Y' > 0$ であることは同値である．$Q|Y' = (Q|X')|Y'$ は ample であるから，§1 の命題より $\sigma_1(A)\cdot Y' > 0$．（但し，A は $\Omega^{\oplus N}$ の一般な一次元 linear subspace.）一方 $\sigma_1(A) = c_r(Q)$．故に，$c_r(E)\cdot Y > 0$．故に $c_r(E)$ は numerically positive である．

命題　前述の条件の下で，$1 \le {}^{\forall}s \le r$ なる s に対して，$c_s(E)$ は numerically positive である．

(証明). $s < r$ として良い．前の命題の証明と同様に次の事が示されれば良い．Y を $G = Grass_r(\Omega^{\oplus N})$ の s 次元 closed irreducible subvariety で，$Q|Y$ が ample となるものとするとき，$c_s(Q)\cdot Y > 0$ が示されれば良い．

$$0 \to R \to \mathcal{O}_G^{\oplus N} \to Q \to 0 \qquad (\text{exact})$$

R : universal subvector bundle.

故に，Y 上で考えて，

$$0 \to R|Y \to \mathcal{O}_Y^{\oplus N} \xrightarrow{\alpha} Q|Y \to 0 \quad \text{(exact)}$$

一方，$s<r$ より，$Q|Y$ は $H^0(Y, Q|Y)$ の $(r-s)$ 個の generic sections から生成される trivial subbundle をもつから，

$$0 \to \mathcal{O}_Y^{\oplus(r-s)} \xrightarrow{i} Q \xrightarrow{\rho} \tilde{Q} \to 0 \quad \text{(exact)}$$

$$\tilde{Q} = Q/\mathcal{O}_Y^{\oplus(r-s)}, \quad \operatorname{rank} \tilde{Q} = s.$$

を得る．故に，

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & & \mathcal{O}_Y^{\oplus(r-s)} \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[d, "i"] & \\
0 \arrow[r] & R|Y \arrow[r] & \mathcal{O}_Y^{\oplus N} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, phantom] & Q|Y \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \quad \text{(exact)} \\
 & & & \tilde{Q} \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

である commutative diagram を得る．(但し，$\gamma = \rho\circ\alpha$)．$Q|Y$ が ample より $\tilde{Q}$ も又 ample で global sections で生成されている．γ に対応する canonical morphism $\bar{\gamma} : Y \to \mathrm{Grass}_s(\Omega^{\oplus N})$ を考えると，$\bar{\gamma}$ は finite morphism であり，$\tilde{Q} = \bar{\gamma}^*(Q')$，但し $Q' = \mathrm{Grass}_s(\Omega^{\oplus N})$ の universal quotient vector bundle．Y' を Y の $\bar{\gamma}$ による image とすると，$Q'|Y'$ は ample vector bundle．前の命題より，$c_s(Q')\cdot Y' > 0$ であるから，適当な

$\Omega^{\oplus N}$ の一次元 linear subspace A で $\sigma_1(A)$ と Y' とが proper に交っているものが存在する。以下，適当な $\Omega^{\oplus N}$ の $(r-s+1)$ 次元の vector subspace B で，$\sigma_1(B) = c_s(Q)$ と Y とが proper に交わる物が存在することを示めそう。$H^0(Y, Q|Y)$ の $(r-s)$ 個の generic members によって定まる，$\mathcal{O}_Y^{\oplus(r-s)}$ から，$\mathcal{O}_Y^{\oplus N}$ への injection を δ とすると，$\alpha\circ\delta = i$. 故に Y の任意の point y に対して，$\Omega^{\oplus N}$ の $(r-s)$ 次元 vector subspace W が存在し（W は y に depend しない!）次の性質をみたす。$\forall y\in Y$ に対して，

(1) $\alpha(y)\colon W \longrightarrow \Omega^{\oplus r}$ は injection.

(2) $\mathrm{Ker}(\beta(y)) = \alpha(y)(W)$.

このとき，$Y_0 = \{y\in Y \mid \mathrm{Ker}\,\gamma(y) \ni A\}$ とおく。$\sigma_1(A)$ と Y' とが proper に交わり，かつ，~~ることより，~~ $\sigma_1(A)\cdot Y' > 0$ より，Y_0 は空でない有限集合。y_0 を Y_0 の任意の point として固定する。このとき $\alpha(y_0)(A) = 0$ として良い。$B = A\cdot\Omega\oplus W$ とすれば，$\dim B = 1+r-s$ であり，これが求める B である。$Y_1 = \{y\in Y \mid \dim(B\cap \mathrm{Ker}\,\alpha(y)) \geq 1\}$ が空でない有限集合であることを示めす。B の定義より，$y_0 \in Y_1$. $\forall y\in Y_1$ に対して，$\mathrm{Ker}\,\alpha(y) \ni xA + w \neq 0$ ($x\in\Omega$, $w\in W$) とすると，

$$0 = \alpha(y)(xA+w) = x\alpha(y)(A) + \alpha(y)(w)$$

$$0 = x\beta(y)(\alpha(y)(A)) + \beta(y)(\alpha(y)(w)) = x\gamma(y)(A).$$

$\gamma(y)(A) \neq 0$ ならば，$x=0$ で，$w\in \mathrm{Ker}\,\alpha(y)$. これは矛盾.

故に、$\gamma(y)(A)=0$ で、$y\in Y_0$. 故に $Y_1\subseteq Y_0$.

最後に、定理を証明する為に Schubert cycles の間の交わりの状態について復習しましょう。

Q : $\mathrm{Grass}_r(\Omega^{\oplus N})$ の universal quotient vector bundle.

σ_a : Schubert condition $a=(a_1,\dots,a_{N-r})$ $(1\le a_1<a_2<\cdots<a_{N-r}\le N)$ の Schubert cycle.

c_i : Q の i 次の chern class.

<u>補題</u> (Pieri's formula). $\forall a=(a_1,\dots a_{N-r})$, $1\le\forall k\le r$ に対して、

$\sigma_a\cdot c_k=\sum_{l}\sigma_l$ 　但し、$l=(l_1,\dots,l_{N-r})$ は次の二つの条件をみたすすべての組を動く。

(1) $1\le l_1\le a_1<l_2\le a_2<\cdots<a_{N-r}\le l_{N-r}\le N$

(2) $\sum_{i=1}^{N-r}a_i-k=\sum_{i=1}^{N-r}l_i$

証明は Hodge-Pedoe [6] をみられたし。

<u>補題</u> $I=(i_1,\cdots,i_r)$ で $|I|=s\le r$ をみたすすべての I に対して、$c^I(Q)=c_1^{i_1}\cdots c_r^{i_r}=\alpha c_s+\sum_a d_a\sigma_a$ 　但し. $\alpha>0$, $d_a\ge 0$

$|a|=a_1+\cdots+a_{N-r}=\frac{1}{2}(N-r)(N+r+1)-s$.

(証明) $\mathcal{I}=\{I=(i_1,\dots,i_r)\mid |I|\le r\}$ の中に辞書式順序を入れる。この順序に関しての帰納法で示す。$I=(0,0,\dots,1)$

に対しては自明．$I=(i_1,\dots,i_r)>(0,0,\dots,1)$ とし，k を $i_{k+1}=\dots=i_r=0$，$i_k\neq 0$ となるものとする．$J=(i_1,\dots,i_k-1,0,\dots,0)$ とおくと $I>J$．帰納法の仮定により，

$$c^J(a)=c_1^{i_1}\cdots c_k^{i_k-1}=\alpha' c_{s-k}+\sum_{\ell}\alpha'_\ell\sigma_\ell .$$

但し，
$$\alpha'>0$$
$$\alpha'_\ell\geq 0$$

Pieri's formula より，

$$c_{s-k}\cdot c_k=\sigma_{r-(s-k)+1,\,r+2,\,\dots,\,N}\cdot c_k$$
$$=\sum_{c}\sigma_c$$

但し，$|c|=c_1+\dots+c_{N-r}=r-(s-k)+1+(r+2)+\dots+N-k$

$$1\leq c_1\leq r-s+k+1\leq c_2\leq r+2<c_3\leq r+3<\dots<c_{N-r}\leq N$$

故に，$c_3=r+3$，$c_4=r+4$，…，$c_{N-r}=N$．$c_2=r+2$ とすると，$c_1=r-s+1$．故に，この $c=(c_1,\dots,c_{N-r})$ に対しては，$\sigma_c=c_s(a)$ であるから，$c_{s-k}\cdot c_k=c_s+\sum_{c,\,\sigma_c\neq c_s}\sigma_c$．故に，$c^I(a)=c_1^{i_1}\cdots c_k^{i_k}$
$=c^J(a)\cdot c_k=\alpha'(c_{s-k}\cdot c_k)+\sum_{\ell}\alpha'_\ell\sigma_\ell\cdot c_k=\alpha c_s+\sum_a\alpha_a\sigma_a$．
但し，$\alpha>0$，$\alpha_a\geq 0$．

<u>定理の証明</u>．§2の条件の下で，$|I|\leq\min(n,r)$ なる I に対して $c^I(E)$ が numerically positive であることを示めす．$r\leq n$ として良い．$|I|=s\leq r$ とする．E の global sections を利用して X から $\mathrm{Grass}_r(\Omega^{\oplus N})$ への morphism を考えることにより，Y を

$Grass_r(\Omega^{\oplus N})$ の s 次元 closed subscheme で、$Q|Y$ が ample のとき、$c^I(Q)\cdot Y > 0$ を示せば良い。$c^I(Q) = \alpha c_s + \sum_a d_a \sigma_a$ ($\alpha > 0$, $\sigma_a \geq 0$). $c^I(Q)\cdot Y = \alpha(c_s \cdot Y) + \sum_a d_a(\sigma_a \cdot Y)$. c_s が numerically positive であることより、$c_s \cdot Y > 0$. 一方 $Grass_r(\Omega^{\oplus N})$ のすべての closed subvariety は正整数係数の Schubert cycles の和で示せるから $\sigma_a \cdot Y \geq 0$. 故に、$c^I(Q)\cdot Y > 0$.

<u>系.</u> §2 の条件で、$r \leq n$ とする。このとき、E は trivial vector bundle を subbundle としてふくまない。

(証明) $r = 1$ のときは自明。$r \geq 2$ とする。E がもし、trivial subbundle を持ったとし、

$$0 \to O_X^{\oplus(r-s)} \to E \to E' \to 0 \quad (\text{exact})$$

とすれば、$c(E) = c(E')$. 故に $c_r(E) = 0$. これは定理に反する。

参 考 文 献.

[1] R. Hartshorne ; Ample Vector Bundle, Publ. math. I.H.E.S., NO. 29.

[2] P. Griffiths : Some transcendental methods in the study of algebraic cycles, Several complex variables II, Springer-Verlag, NO 185, 1970.

[3] S. Bloch and D. Gieseker ; The positivity of the Chern Classes of Ample Vector Bundle, Invent. math., Vol 12,

Fasc. 2, 1971.
[4] D. Gieseker : P-Ample Bundles and Their Chern Classes, Nagoya Jour, Vol 43, 1971.
[5] S. Kleiman ; Geometry on Grassmannians and Applications to Splitting Bundles and Smoothing Cycles, Pub. Math, I.H.E.S, NO 36.
[6] Hodge and Pedoe : Methods of Algebraic Geometry II, Cambridge Univ. Press, 1952.
[7] 隅広 : Very Ample Vector Bundles, 数理解析研究所講究録 116.